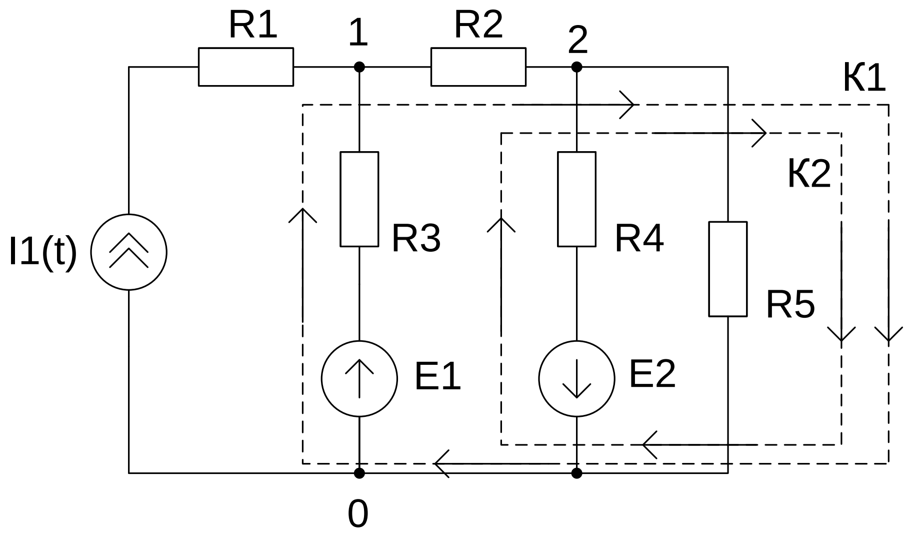
Задача №1

Дано: $I_1(t) = 20\sin(300t)$ А; $E_1 = 5$ В; $E_2 = 12$ В; $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $R_4 = 4$ Ом; $R_5 = 5$ Ом.

Определить: Составить топологические уравнения цепи. Найти токи и напряжения.



Решение:

Нумеруем независимые узлы цепи: 0,1, 2. Выделяем в цепи два независимых контура K_1 и K_2, направление обхода контуров выберем так, как показано на рисунке. На основании законов Кирхгофа, а также используя закон Ома, для 2-х независимых узлов и 2-х независимых контуров составляем систему линейных алгебраических уравнений (топологические уравнения цепи):

$$\begin{cases} I_1(t) + i_3 = i_2 - \text{для 1-го узла} \\ i_2 + i_4 = i_5 - \text{для 2-го узла} \\ i_3R_3 + i_2R_2 + i_5R_5 = E_1 - \text{для контура } K_1 \\ i_4R_4 + i_5R_5 = -E_2 - \text{для контура } K_2 \end{cases}$$

Решаем систему уравнений методом подстановок.

$$\begin{cases} i_3 = i_2 - I_1(t) \\ i_5 = i_2 + i_4 \\ R_3(i_2 - I_1(t)) + i_2R_2 + i_2R_5 + i_4R_5 = E_1 \\ i_4R_4 + i_2R_5 + i_4R_5 = -E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_3 = i_2 - I_1(t) \\ i_5 = i_2 + i_4 \\ i_2(R_2 + R_3 + R_5) - \dfrac{E_2R_5 + i_2R_5^2}{R_4 + R_5} - I_1(t)R_3 = E_1 \\ i_4R_4 + i_2R_5 + i_4R_5 = -E_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_2 = \dfrac{E_1(R_4 + R_5) + E_2R_5 + I_1(t)R_3(R_4 + R_5)}{R_4(R_2 + R_3 + R_5) + R_5(R_2 + R_3)} \\ i_3 = i_2 - I_1(t) \\ i_4 = \dfrac{-E_2 - i_2R_5}{R_4 + R_5} \\ i_5 = i_2 + i_4 \end{cases}$$

Подставляя числовые значения величин, находим ток i_2:

$$i_2 = i_2(t) = \frac{5\cdot(4+5) + 12\cdot 5 + 20\sin(300t)\cdot 3\cdot(4+5)}{4\cdot(2+3+5) + 5\cdot(2+3)} = 1,615 + 8,308\sin(300t) \text{ А.}$$

Находим остальные токи:

$$i_3 = i_3(t) = i_2(t) - I_1(t) = 1,615 + 8,308\sin(300t) - 20\sin(300t) =$$
$$= 1,615 - 11,692\sin(300t) \text{ А;}$$

$$i_4 = i_4(t) = \frac{-12 - [1,615 + 8,308\sin(300t)]\cdot 5}{4+5} = -2,231 - 4,615\sin(300t) \text{ А;}$$

$$i_5 = i_5(t) = i_2(t) + i_4(t) = 1,615 + 8,308\sin(300t) - 2,231 - 4,615\sin(300t) =$$
$$= -0,616 + 3,693\sin(300t) \text{ А;}$$

$$i_1(t) = I_1(t) = 20\sin(300t) \text{ А.}$$

Напряжения на резисторах находим по закону Ома:

$$U_1(t) = i_1(t)R_1 = 20\sin(300t)\cdot 1 = 20\sin(300t) \text{ В;}$$

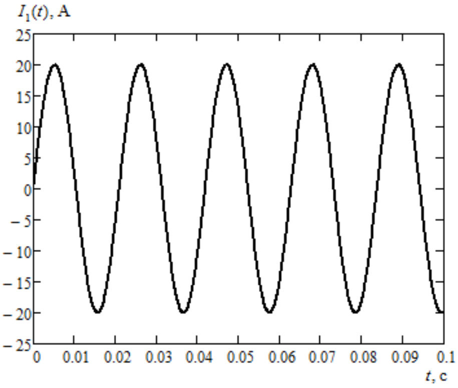
$$U_2(t) = i_2(t)R_2 = (1,615 + 8,308\sin(300t))\cdot 2 = 3,23 + 16,616\sin(300t) \text{ В;}$$

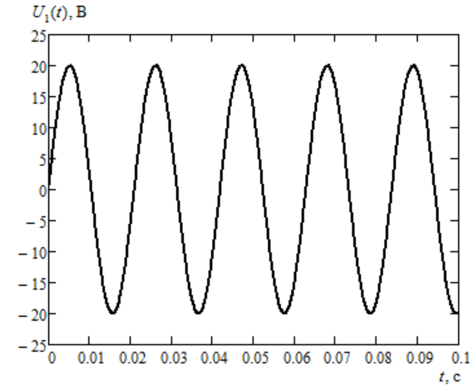
$$U_3(t) = i_3(t)R_3 = (1,615 - 11,692\sin(300t))\cdot 3 = 4,845 + 35,076\sin(300t) \text{ В;}$$

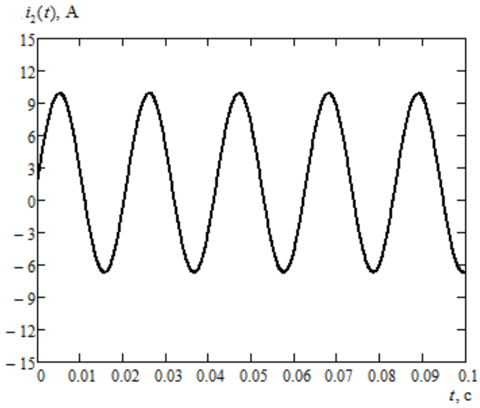
$$U_4(t) = i_4(t)R_4 = (-2,231 - 4,615\sin(300t))\cdot 4 = -8,924 - 18,46\sin(300t) \text{ В;}$$

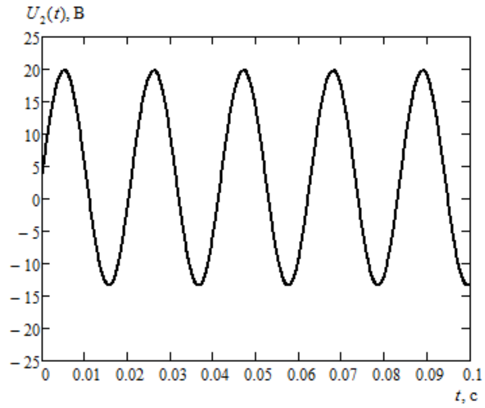
$$U_5(t) = i_5(t)R_5 = (-0,616 + 3,693\sin(300t))\cdot 5 = 3,08 + 18,465\sin(300t) \text{ В.}$$

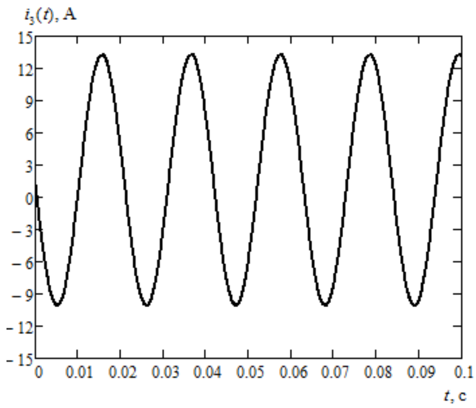
Ниже приведены графики зависимостей токов и напряжений от времени. Законы изменения напряжения с точностью до постоянного коэффициента (сопротивления) повторяют законы изменения тока.

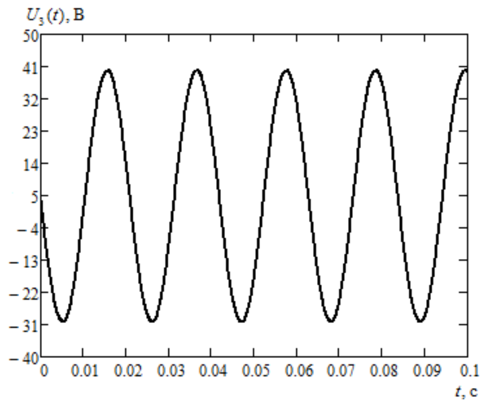

I1(t), А
25
20
15
10
5
0
– 5
– 10
– 15
– 20
– 25
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
t, с

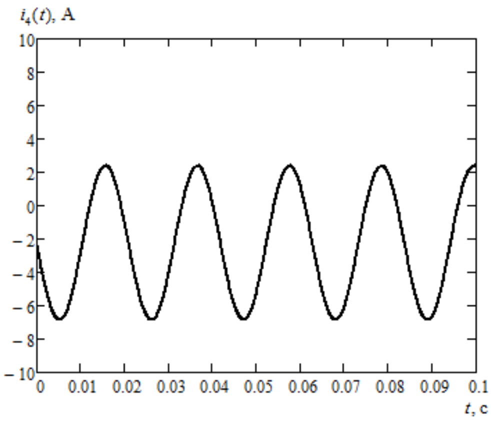

U1(t), В
25
20
15
10
5
0
– 5
– 10
– 15
– 20
– 25
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
t, с

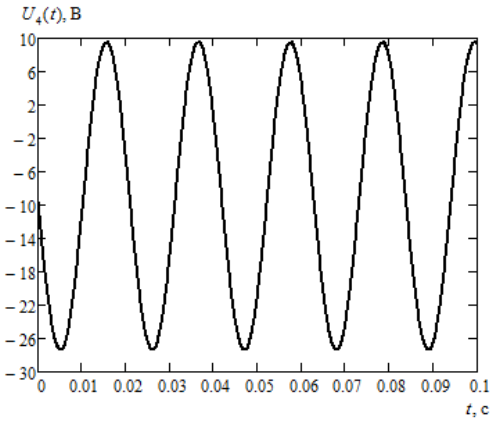

i2(t), А
15
12
9
6
3
0
– 3
– 6
– 9
– 12
– 15
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
t, с

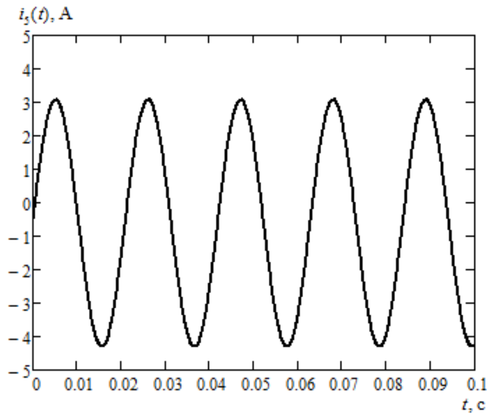

U2(t), В
25
20
15
10
5
0
– 5
– 10
– 15
– 20
– 25
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
t, с

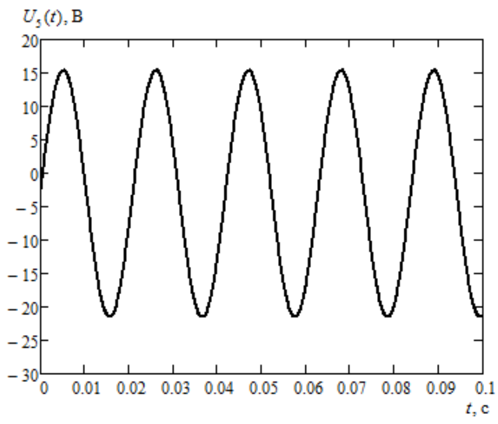

i3(t), А
15
12
9
6
3
0
– 3
– 6
– 9
– 12
– 15
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
t, с


U3(t), В
50
41
32
23
14
5
– 4
– 13
– 22
– 31
– 40
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
t, с


i4(t), А
10
8
6
4
2
0
– 2
– 4
– 6
– 8
– 10
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
t, с


U4(t), В
10
6
2
– 2
– 6
– 10
– 14
– 18
– 22
– 26
– 30
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
t, с

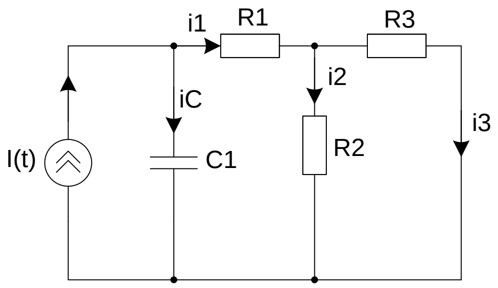




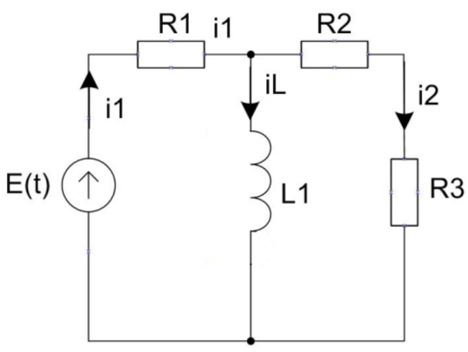
Задача №2

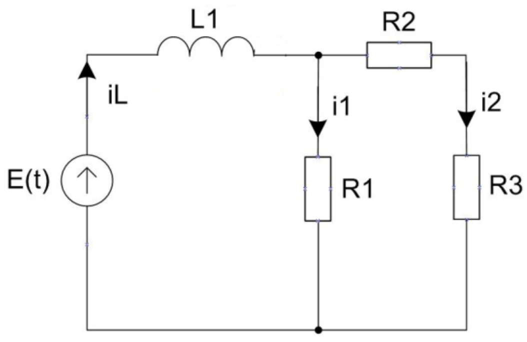
Дано: $I(t) = 10[1(t) - 1(t-20)]$ мА; $E(t) = -5[1(t) - 1(t-50)]$ В; $C_1 = 10$ мФ; $L_1 = 1$ мГн; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 60$ Ом; $R_3 = 5$ Ом.

Определить: U_{C1}, U_{R3}, U_{L1}, переходные и импульсные характеристики цепей а – в.



а)



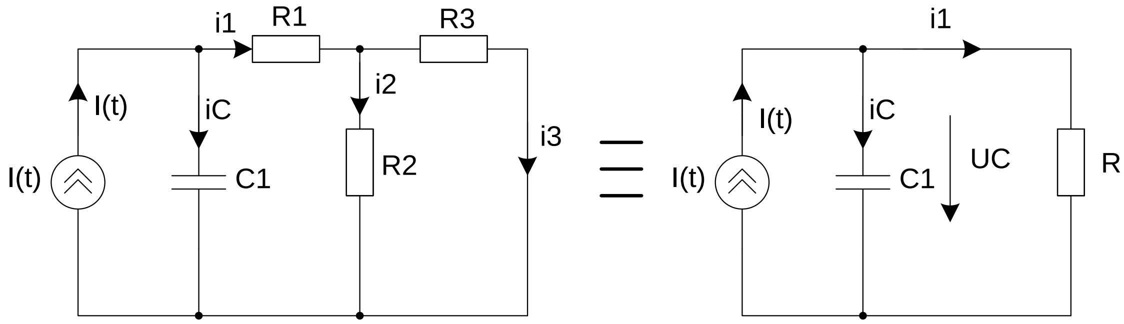


б)

в)

<u>*Решение:*</u>

1) Выполним преобразование цепи а:



Обозначим $C = C_1$.

Здесь $R = R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 10 + \dfrac{5 \cdot 60}{5 + 60} = 14,615$ Ом.

На основании законов Кирхгофа и закона Ома составляем систему уравнений для цепи:

$$\begin{cases} i_1 + i_C = I(t) \\ i_1 = \dfrac{U_C}{R} \\ i_C = C\dfrac{dU_C}{dt} \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем дифференциальное уравнение для напряжения на ёмкости U_C :

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{I(t)}{C}.$$

$\tau = RC = 14,615 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 0,146$ с - постоянная времени цепи. Умножим обе части дифференциального уравнения на множитель $\mu = e^{\frac{t}{\tau}}$, получим:

$$\frac{dU_C}{dt}e^{\frac{t}{\tau}} + \frac{U_C}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{I(t)}{C}e^{\frac{t}{\tau}},$$

или

$$\frac{d}{dt}(U_C e^{\frac{t}{\tau}}) = \frac{I(t)}{C}e^{\frac{t}{\tau}}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}}dt'.$$

Имеем $U_0 = U_C(0) = 0$, так как цепь не обладает начальным запасом энергии и напряжение на ёмкости не может измениться скачком.

Имеем:

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}}dt' = \frac{10\cdot 10^{-3}}{10\cdot 10^{-3}}\cdot e^{-\frac{t}{0{,}146}}\cdot\int_0^t e^{\frac{t'}{0{,}146}}[1(t) - 1(t-20)]dt' =$$

$$= 0{,}146 e^{-\frac{t}{0{,}146}}[1(t)(e^{\frac{t}{0{,}146}} - 1) - 1(t-20)(e^{\frac{t}{0{,}146}} - e^{\frac{20}{0{,}146}})] =$$

$$0{,}146[(1 - e^{-6{,}849t})\cdot 1(t) - 1(t-20)(1 - e^{-6{,}849(t-20)})]\ \text{В}.$$

Введем обозначение $r = \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \dfrac{60\cdot 5}{60+5} = 4{,}615\ \text{Ом}$.

Находим напряжение на резисторе R_3:

$$U_{R3}(t) = U_C(t)\frac{r}{r+R_1} = 0{,}146[(1-e^{-6{,}849t})\cdot 1(t) - 1(t-20)(1-e^{-6{,}849(t-20)})]\cdot\frac{4{,}615}{4{,}615+10} =$$

$$0{,}046[(1-e^{-6{,}849t})\cdot 1(t) - 1(t-20)(1-e^{-6{,}849(t-20)})]\ \text{В}.$$

С другой стороны, можно записать напряжение на емкости $U_C(t)$, выразив его через импульсную характеристику цепи:

$$U_C(t) = \int_0^t I(t')k(t-t')dt'.$$

Отсюда получаем импульсную характеристику цепи в виде:

$$k(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{C} = \frac{e^{-\frac{t}{0{,}146}}}{10\cdot 10^{-3}} = 100e^{-6{,}849t}\ \frac{\text{В}}{\text{А}\cdot\text{с}},$$

поскольку размерность импульсной характеристики равна отношению размерности отклика цепи к произведению размерности внешнего воздействия на время (воздействие – ток $I(t)$, отклик – напряжение U_C).

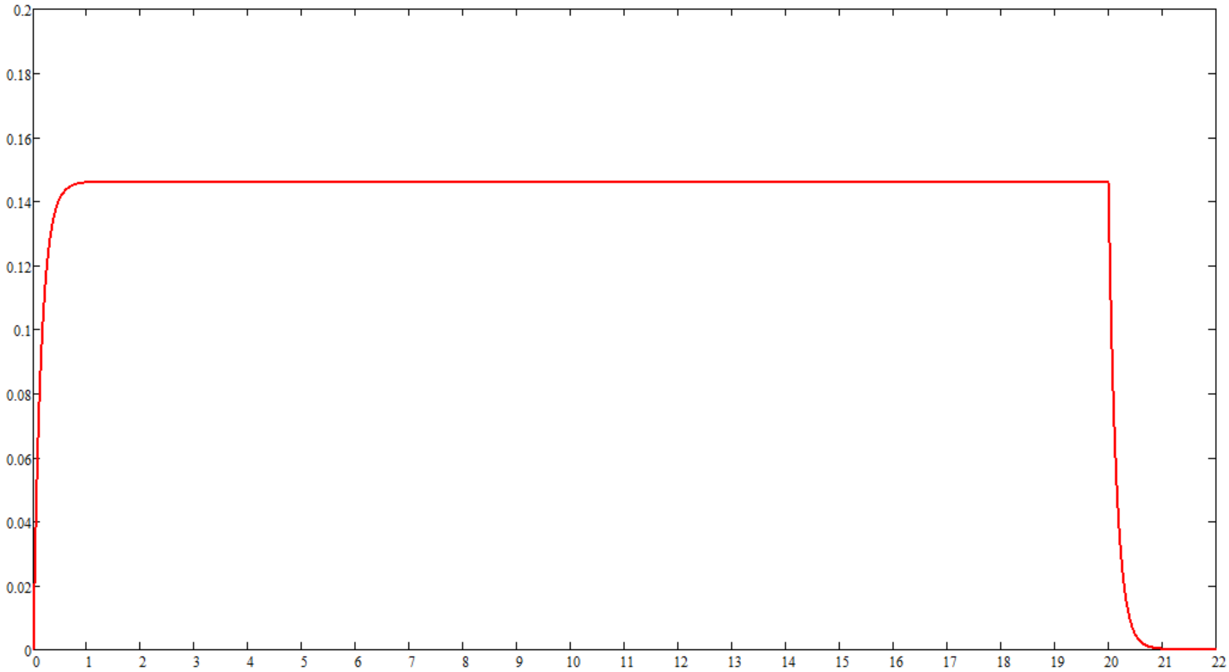
Находим переходную характеристику:

$$h(t) = \int_0^t k(t')dt' = \frac{\tau}{C}\cdot(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{0{,}146\cdot(1 - e^{-\frac{t}{0{,}146}})}{10\cdot 10^{-3}} = 14{,}6(1 - e^{-6{,}849t})\ \text{Ом},$$

поскольку размерность переходной характеристики равна отношению размерности отклика цепи к размерности внешнего воздействия.

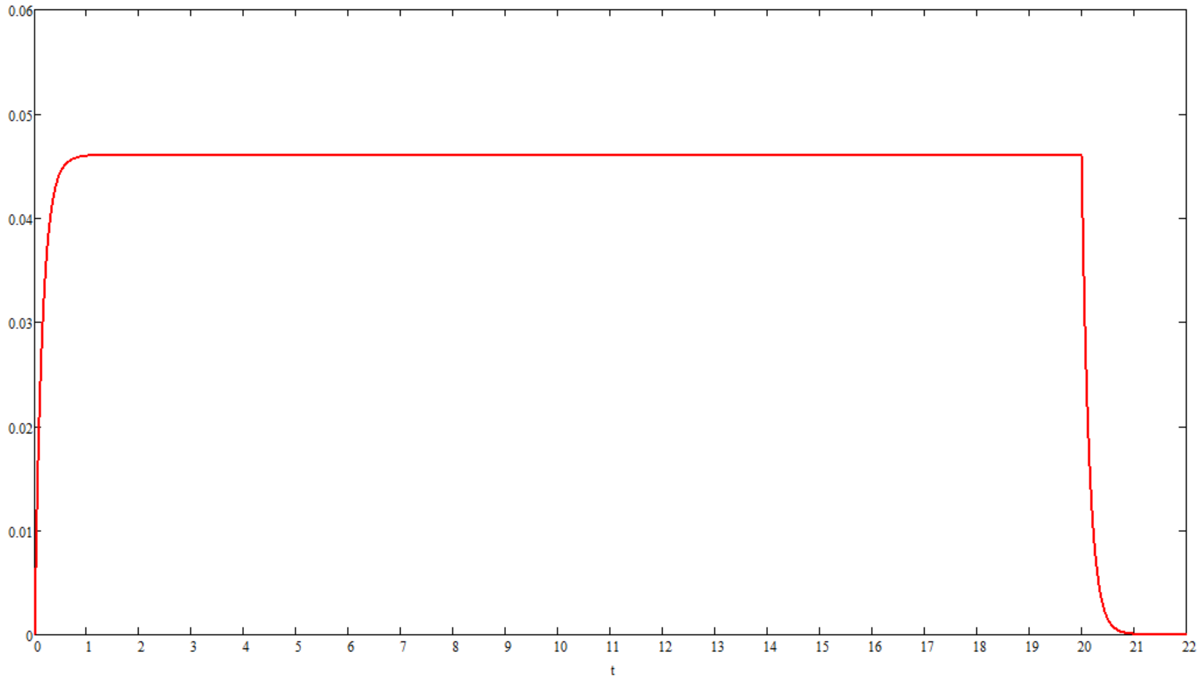
Строим графики.

$U_C(t)$, В

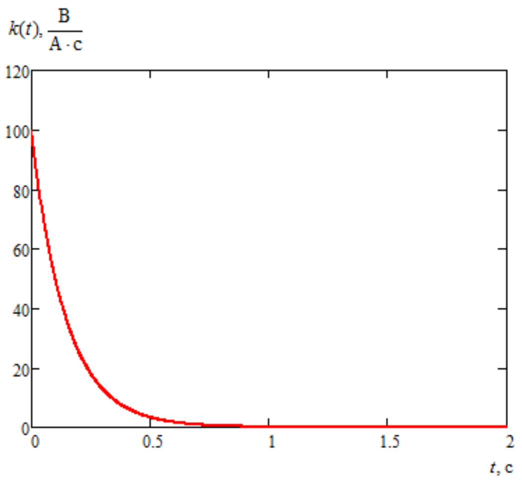


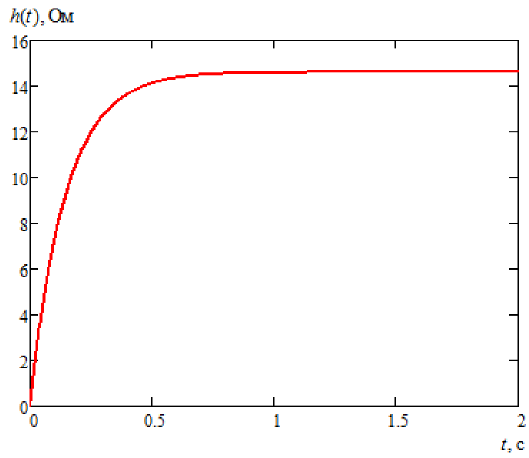
t, с

$U_{R3}(t)$, В



t, с





2) Для цепи б на основании законов Кирхгофа и закона Ома составляем систему уравнений (вводя обозначение $L = L_1$):

$$\begin{cases} i_L + i_2 = i_1 \\ i_2(R_2 + R_3) = L\dfrac{di_L}{dt} \\ i_1 R_1 + L\dfrac{di_L}{dt} = E(t) \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем дифференциальное уравнение для тока через индуктивность i_L:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L R_1 (R_2 + R_3)}{L(R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{E(t)(R_2 + R_3)}{L(R_1 + R_2 + R_3)} .$$

$\tau = \dfrac{L(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3)} = \dfrac{10^{-3} \cdot (10 + 60 + 5)}{(60 + 5) \cdot 10} = 1{,}154 \cdot 10^{-4}$ с - постоянная времени цепи. Умножим обе части дифференциального уравнения на множитель $\mu = e^{\frac{t}{\tau}}$, получим:

$$\frac{di_L}{dt} e^{\frac{t}{\tau}} + \frac{i_L}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{E(t)}{R_1 \tau} e^{\frac{t}{\tau}},$$

или

$$\frac{d}{dt}(i_L e^{\frac{t}{\tau}}) = \frac{E(t)}{R_1 \tau} e^{\frac{t}{\tau}}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$i_L(t)=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{R_1\tau}\int_0^t E(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}}dt'.$$

Имеем $i_0=i_L(0)=0$, так как цепь не обладает начальным запасом энергии и ток через индуктивность не может измениться скачком.

Имеем:

$$i_L(t)=\frac{1}{R_1\tau}\int_0^t E(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}}dt'=\frac{-5\cdot 1{,}154\cdot 10^{-4}}{10\cdot 1{,}154\cdot 10^{-4}}\cdot e^{-\frac{t}{1{,}154\cdot 10^{-4}}}\cdot\int_0^t e^{\frac{t'}{1{,}154\cdot 10^{-4}}}[1(t)-1(t-50)]dt'=$$

$$=-0{,}5e^{-8667t}[1(t)(e^{8667t}-1)-1(t-50)(e^{8667t}-e^{4{,}333\cdot 10^5 t})]=$$

$$-0{,}5[(1-e^{-8667t})\cdot 1(t)-1(t-50)(1-e^{-8667(t-50)})]\text{ А.}$$

$$U_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=-4{,}333\cdot[e^{-8667t}\cdot 1(t)-1(t-50)e^{-8667(t-50)}]\text{ В.}$$

Импульсная характеристика цепи (воздействие – напряжение $E(t)$, отклик – ток $i_L(t)$) :

$$k(t)=\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_1\tau}=\frac{e^{-8667t}}{10\cdot 1{,}154\cdot 10^{-4}}=866{,}55e^{-8667t}\ \frac{\text{А}}{\text{В}\cdot\text{с}}\quad.$$

Находим переходную характеристику:

$$h(t)=\int_0^t k(t')dt'=\frac{\tau}{R_1\tau}\cdot(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=\frac{1-e^{-8667t}}{10}=0{,}1(1-e^{-8667t})\text{ См.}$$

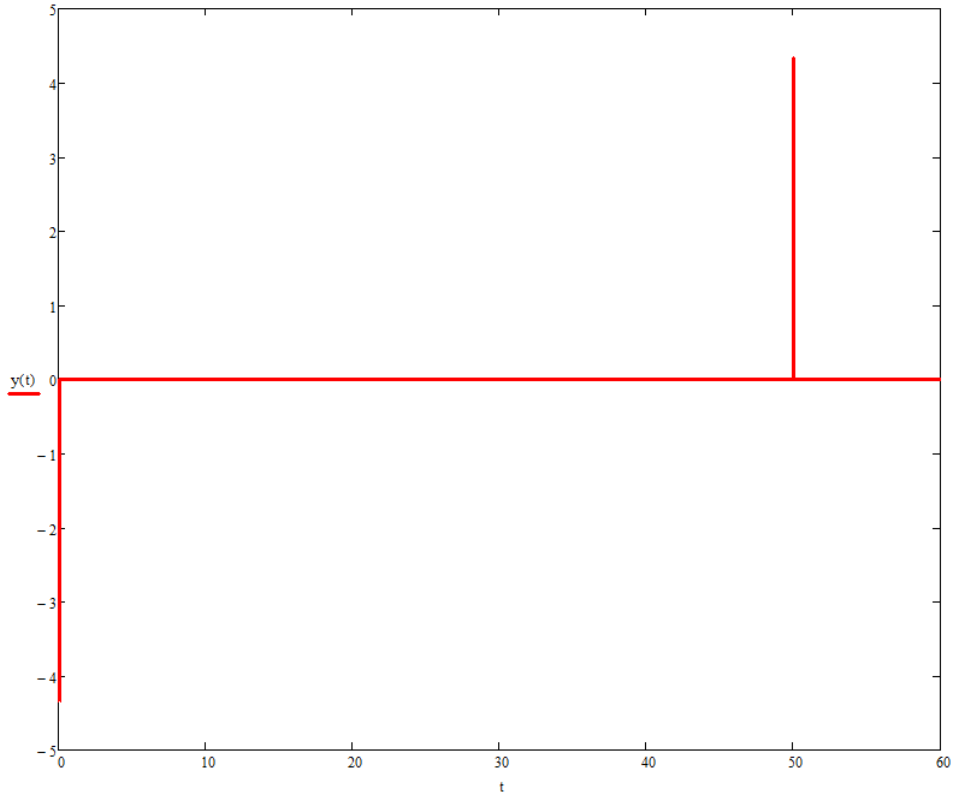
Находим напряжение на резисторе R_3 :

$$U_{R3}(t)=U_L(t)\frac{R_3}{R_2+R_3}=-4{,}333\cdot[e^{-8667t}\cdot 1(t)-1(t-50)e^{-8667(t-50)}]\cdot\frac{5}{5+60}=$$

$$=-0{,}333\cdot[e^{-8667t}\cdot 1(t)-1(t-50)e^{-8667(t-50)}]\text{ В}.$$

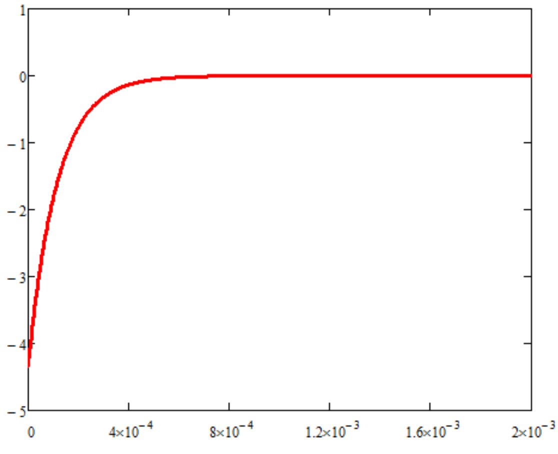
Строим графики. Так как постоянная времени цепи несравнимо меньше длительности входного импульса напряжения, то графики для $U_L(t)$ и $U_{R3}(t)$ построим в нескольких масштабах с увеличением участков фронта и спада.

$U_L(t)$, В



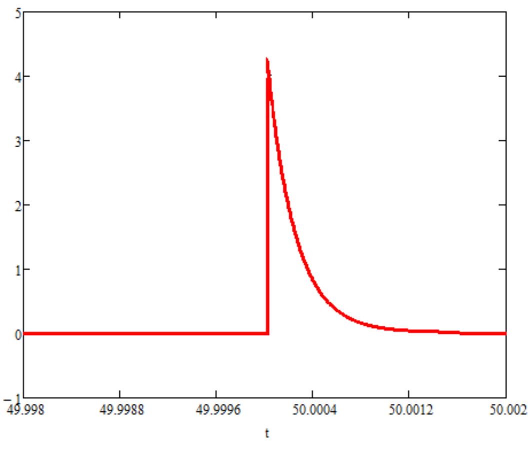
t, с

$U_L(t)$, В



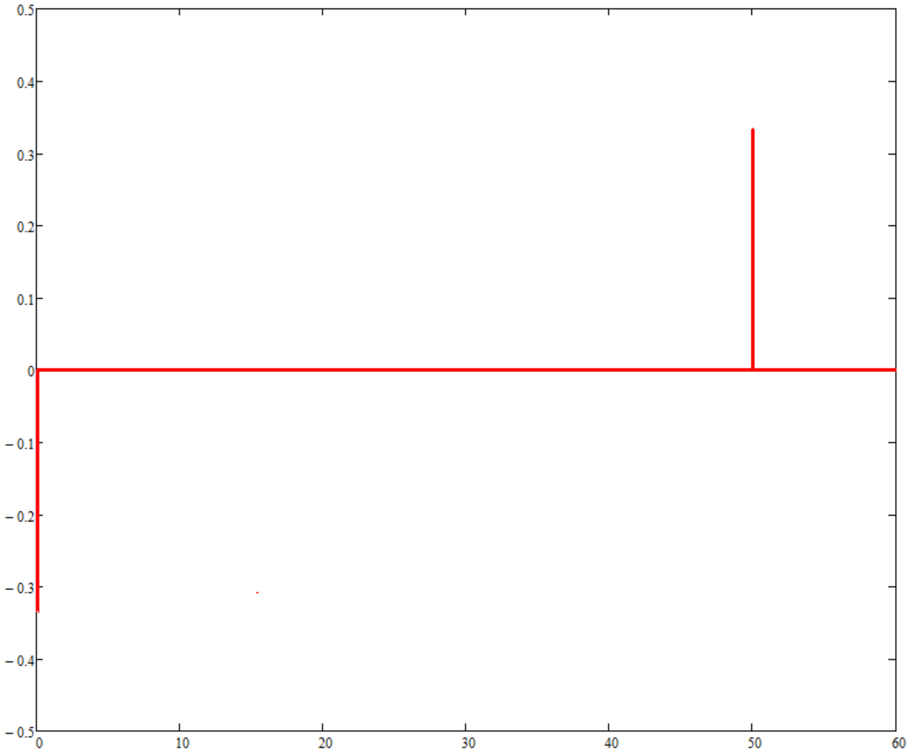
t, с

$U_L(t)$, В



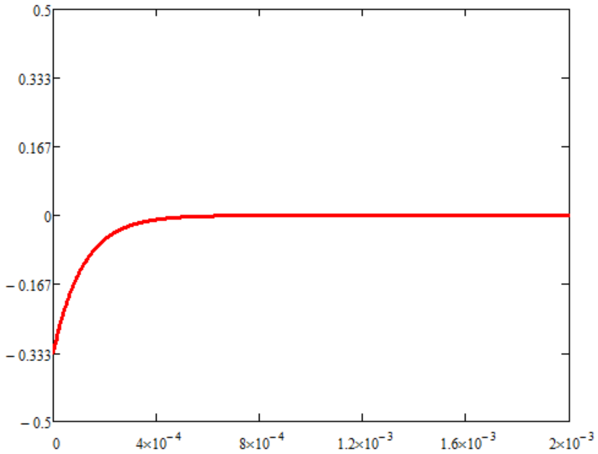
t, с

$U_{R3}(t)$, В



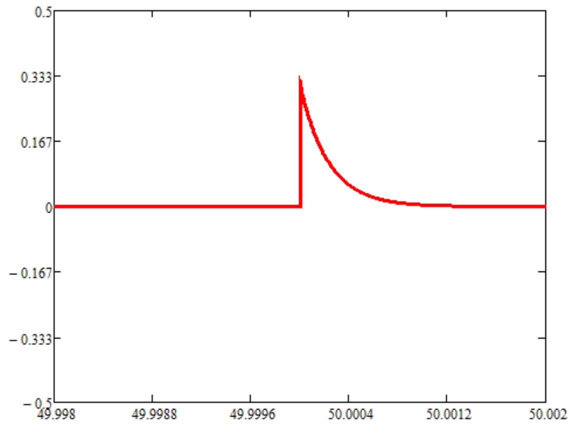
t, с

$U_{R3}(t)$, В



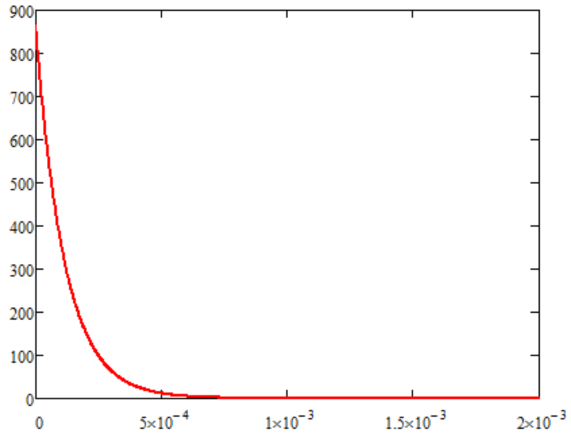
t, с

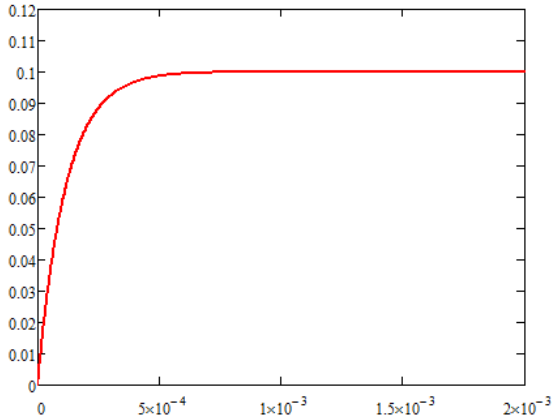
$U_{R3}(t)$, В



t, с

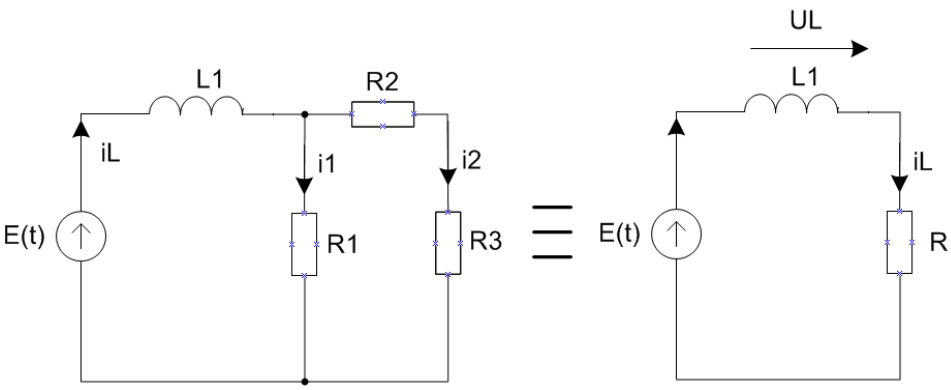
$k(t), \dfrac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{с}}$ $\qquad\qquad$ $h(t), \text{См}$





t, с $\qquad\qquad$ t, с

3) Выполним преобразование цепи в:



Обозначим $L = L_1$.

Здесь $R = \dfrac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \dfrac{10 \cdot (60+5)}{10+60+5} = 8{,}667$ Ом.

На основании законов Кирхгофа и закона Ома составляем дифференциальное уравнение для тока, протекающего через индуктивность:

$$\frac{di_L}{dt} + i_L \frac{R}{L} = \frac{E(t)}{L}.$$

$\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{10^{-3}}{8{,}667} = 1{,}154 \cdot 10^{-4}$ с - постоянная времени цепи. Умножим обе части дифференциального уравнения на множитель $\mu = e^{\frac{t}{\tau}}$, получим:

$$\frac{di_L}{dt}e^{\frac{t}{\tau}}+\frac{i_L}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}=\frac{E(t)}{L}e^{\frac{t}{\tau}},$$

или

$$\frac{d}{dt}(i_L e^{\frac{t}{\tau}})=\frac{E(t)}{L}e^{\frac{t}{\tau}}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$i_L(t)=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{L}\int_0^t E(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}}dt'.$$

Имеем $i_0=i_L(0)=0$, так как цепь не обладает начальным запасом энергии и ток через индуктивность не может измениться скачком.

Имеем:

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_0^t E(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}}dt'=\frac{-5}{10^{-3}}\cdot e^{-\frac{t}{1{,}154\cdot10^{-4}}}\cdot\int_0^t e^{\frac{t'}{1{,}154\cdot10^{-4}}}[1(t)-1(t-50)]dt'=$$

$$=-0{,}577e^{-8667t}[1(t)(e^{8667t}-1)-1(t-50)(e^{8667t}-e^{4{,}333\cdot10^5 t})]=$$

$$-0{,}577[(1-e^{-8667t})\cdot1(t)-1(t-50)(1-e^{-8667(t-50)})]\ \text{А}.$$

$$U_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=-5{,}00\cdot[e^{-8667t}\cdot1(t)-1(t-50)e^{-8667(t-50)}]\ \text{В}.$$

Импульсная характеристика цепи (воздействие – напряжение $E(t)$, отклик – ток $i_L(t)$):

$$k(t)=\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{L}=\frac{e^{-8667t}}{10^{-3}}=1000e^{-8667t}\ \frac{\text{А}}{\text{В}\cdot\text{с}}\quad.$$

Находим переходную характеристику:

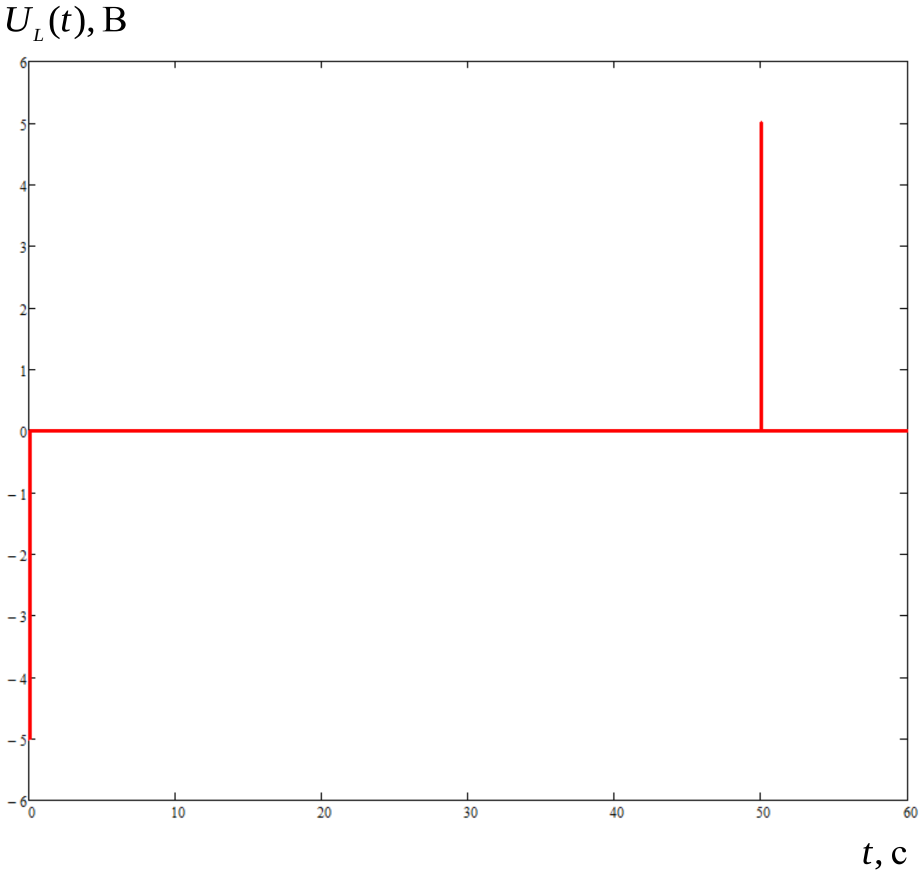
$$h(t)=\int_0^t k(t')dt'=\frac{\tau}{L}\cdot(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=\frac{1{,}154\cdot10^{-4}\cdot(1-e^{-8667t})}{10^{-3}}=0{,}115(1-e^{-8667t})\ \text{См}.$$

Находим напряжение на резисторе R_3:

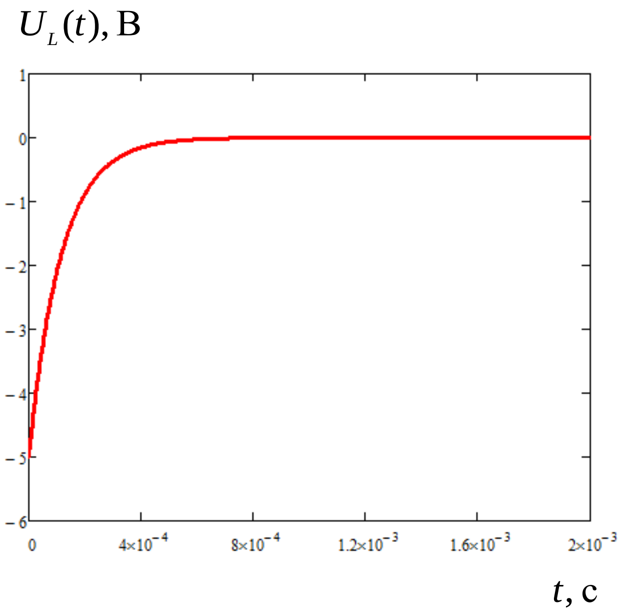
$$U_{R3}(t)=\frac{i_L(t)\cdot R\cdot R_3}{R_2+R_3}=-0{,}577[(1-e^{-8667t})\cdot1(t)-1(t-50)(1-e^{-8667(t-50)})]\cdot\frac{8{,}667\cdot5}{5+60}=$$

$$=-0{,}385\cdot[(1-e^{-8667t})\cdot1(t)-1(t-50)(1-e^{-8667(t-50)})]\text{В}.$$

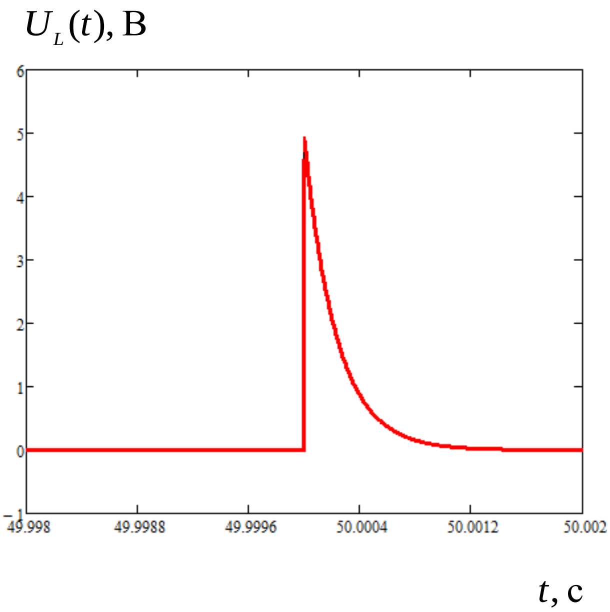
Строим графики. Так как постоянная времени цепи несравнимо меньше длительности входного импульса напряжения, то графики для $U_L(t)$ и $U_{R3}(t)$ построим в нескольких масштабах с увеличением участков фронта и спада.



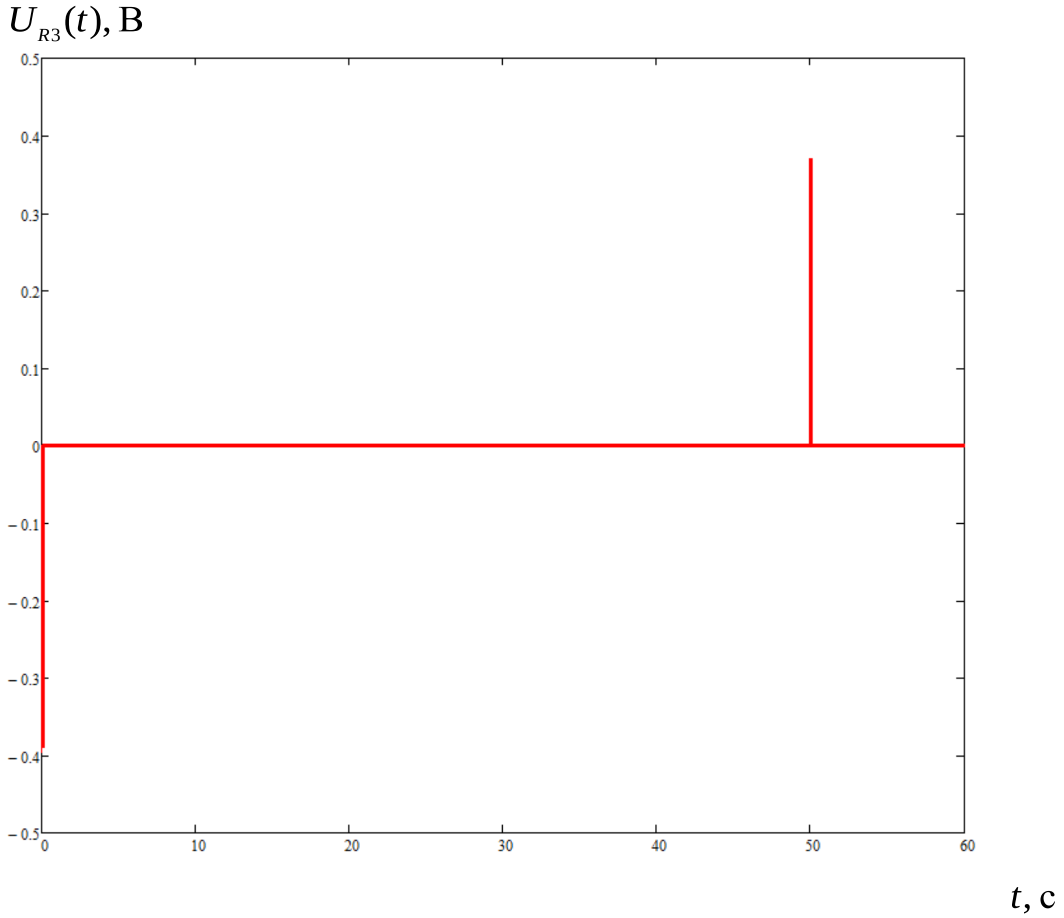
$U_L(t)$, В
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
0
10
20
30
40
50
60
t, с

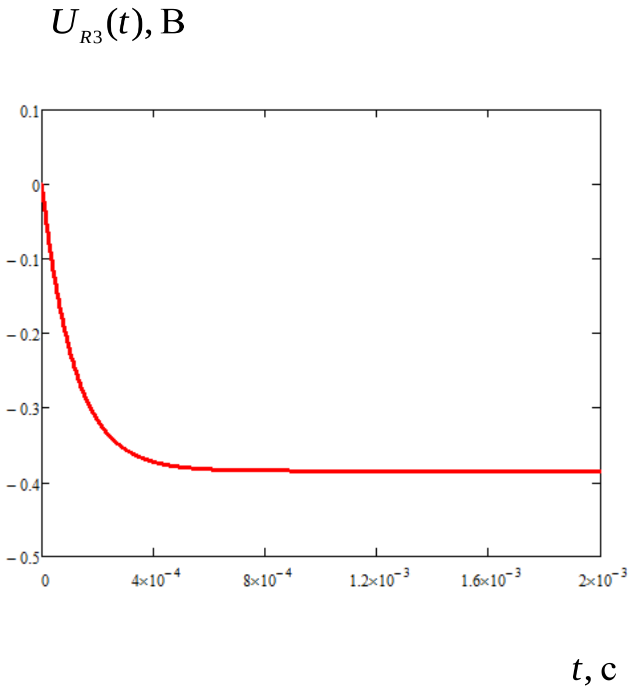


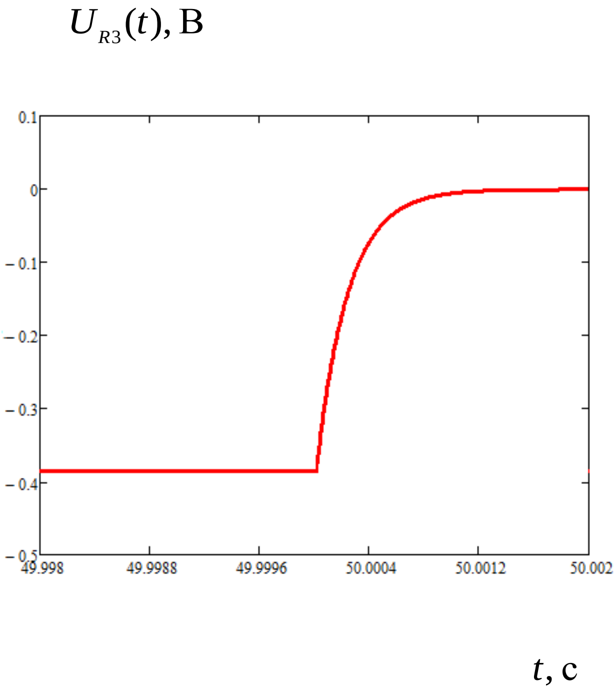
$U_L(t)$, В
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
0
4×10^{-4}
8×10^{-4}
1.2×10^{-3}
1.6×10^{-3}
2×10^{-3}
t, с

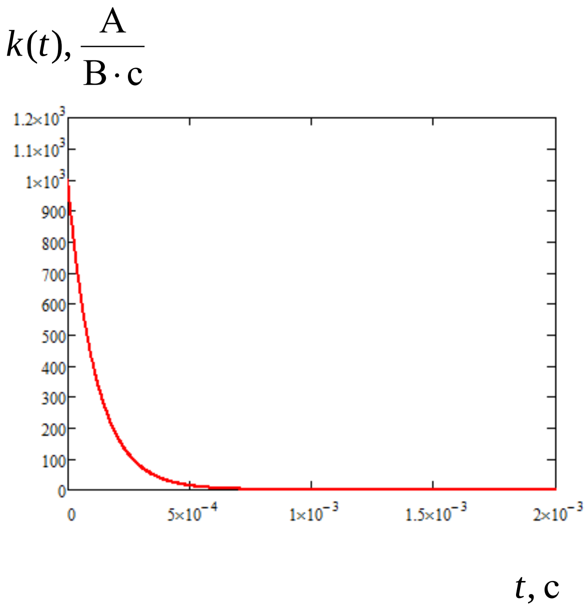


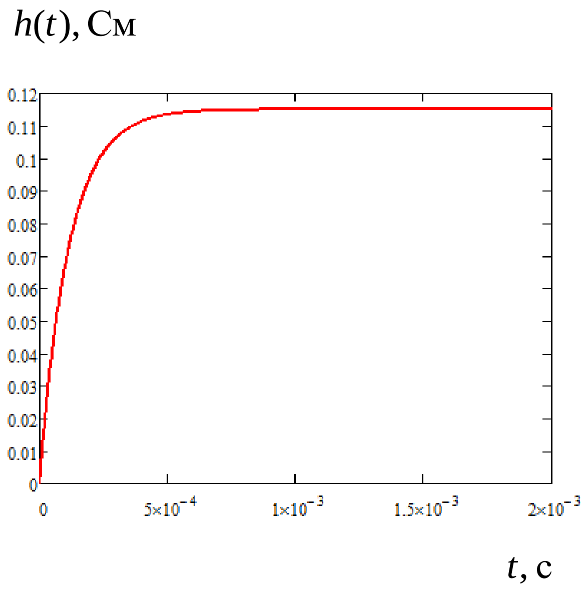
$U_L(t)$, В
6
5
4
3
2
1
0
−1
49.998
49.9988
49.9996
50.0004
50.0012
50.002
t, с


$U_{R3}(t)$, B
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
0
10
20
30
40
50
60
t, c


$U_{R3}(t)$, B
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
0
4×10^{-4}
8×10^{-4}
1.2×10^{-3}
1.6×10^{-3}
2×10^{-3}
t, c


$U_{R3}(t)$, B
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
49.998
49.9988
49.9996
50.0004
50.0012
50.002
t, c

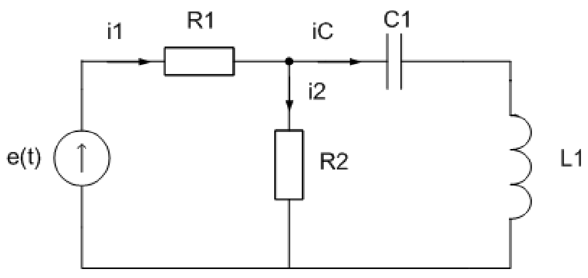




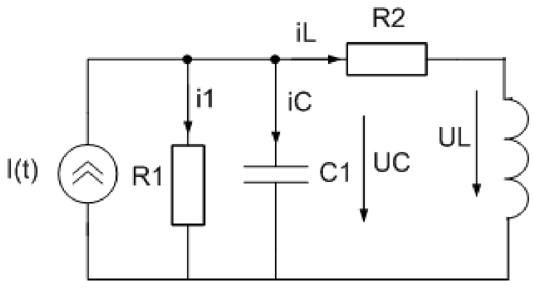
Задача №3

<u>Дано:</u> $e(t)=5\sin(10^5 t)$ В; $I(t)=50\cos(10^7 t)$ мА; $C_1=10$ нФ; $L_1=1$ мГн; $R_1=1$ Ом; $R_2=2$ Ом.

<u>Определить:</u> $\omega_c, \lambda, h(t)$, построить диаграмму состояния, эпюры напряжений и токов.



а)



б)

<u>Решение:</u>

1) Для цепи а составляем уравнения для токов и напряжений (вводим обозначения $C=C_1; L=L_1$) :

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + C\dfrac{dU_C}{dt} \\ i_1R_1 + i_2R_2 = e(t) \\ i_2R_2 = U_C + L\dfrac{d}{dt}(C\dfrac{dU_C}{dt}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = i_2 + C\dfrac{dU_C}{dt} \\ i_2R_1 + CR_1\dfrac{dU_C}{dt} + i_2R_2 = e(t) \\ \dfrac{e - CR_1\dfrac{dU_C}{dt}}{R_1 + R_2}R_2 = U_C + LC\dfrac{dU_C^2}{dt^2} \end{cases}$$

Упрощая последнее уравнение системы, получаем дифференциальное уравнение для напряжения на ёмкости U_C:

$$\frac{dU_C^2}{dt^2} + \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{LC} = \frac{e(t)R_2}{LC(R_1+R_2)}.$$

Рассмотрим режим свободных колебаний, $e(t)=0$. Уравнение принимает вид:

$$\frac{dU_C^2}{dt^2} + \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{LC} = 0.$$

Это – линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем для него характеристическое уравнение:

$$k^2 + \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}k + \frac{1}{LC} = 0.$$

Находим корни этого квадратного уравнения:

$$k_{1,2} = -\frac{R_1R_2}{2L(R_1+R_2)} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1R_2}{2L(R_1+R_2)}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\ .$$

Подставляя числовые значения, получаем $\dfrac{R_1R_2}{2L(R_1+R_2)} = 333{,}33\ \text{с}^{-1}$, $\dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 3{,}162\cdot 10^5$. Поскольку $\dfrac{R_1R_2}{2L(R_1+R_2)} < \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, в данном случае имеем колебательный режим.

Декремент затухания:

$$\lambda = \frac{R_1R_2}{2L(R_1+R_2)} = 333{,}33\, c^{-1}$$

Резонансная частота:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 316227{,}77\ \text{Гц}.$$

Частота свободных колебаний:

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 316227{,}59 \text{ Гц}.$$

Находим свободную составляющую напряжения на конденсаторе:

$$U_{\text{Ссв}}(t) = A_1 e^{-\lambda t + j\omega_c t} + A_2 e^{-\lambda t - j\omega_c t},$$

где A_1 и A_1 - константы.

Принужденную составляющую напряжения на конденсаторе ищем в виде $U_{\text{Спр}}(t) = A_3 \sin(\omega t + \varphi)$, где $\omega = 10^5 \, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ - циклическая частота задающего воздействия. Подставляя $U_{\text{Спр}}(t)$ в дифференциальное уравнение для $U_C(t)$, получаем:

$$-\omega^2 A_3 \sin(\omega t + \varphi) + 2\omega A_3 \lambda \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A_3 \sin(\omega t + \varphi) = \frac{2E\lambda}{R_1 C} \sin(\omega t),$$

где $E = 5$ В - амплитуда напряжения источника питания. Решая уравнение, находим $A_3 = \dfrac{2E\lambda}{R_1 C_1 \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}; \varphi = -arctg\left(\dfrac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$. Полное напряжение на ёмкости находится как сумма свободной и принужденной составляющей:

$$U_C(t) = A_1 e^{-\lambda t + j\omega_c t} + A_2 e^{-\lambda t - j\omega_c t} + A_3 \sin(\omega t + \varphi).$$

Из начальных условий: $U_C(0) = 0$; $i_L(0) = i_C(0) = C \dfrac{dU_C}{dt}|_{t=0} = 0$ находим константы A_1 и A_2 и окончательно получаем:

$$U_C(t) = -\frac{e^{-\lambda t}}{\omega_c}[A_3 \sin(\omega_c t)(\omega_c \cos(\varphi) + \lambda \sin(\varphi)) + \omega A_3 \sin(\varphi)\cos(\omega_c t)] + A_3 \sin(\omega t + \varphi)$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$U_C(t) = -e^{-333{,}33t}[1{,}171 \sin(3{,}162 \cdot 10^5 t) - 2{,}743 \cdot 10^{-3} \cos(3{,}162 \cdot 10^5 t)] +$$
$$+3{,}704 \sin(10^5 t - 7{,}4 \cdot 10^{-4}) \approx 3{,}704 \sin(10^5 t) - 1{,}171 e^{-333{,}33t} \sin(3{,}162 \cdot 10^5 t) \text{ В}.$$

Находим

$$i_C(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt} = i_L(t) = 3{,}704 \cos(10^5 t) - 3{,}704 e^{-333{,}33t} \cos(3{,}162 \cdot 10^5 t) \text{ мА} .$$

Находим $U_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} = -0{,}37 \sin(10^5 t) + 1{,}171 e^{-333{,}33t} \sin(3{,}162 \cdot 10^5 t)$ В. .

Находим $U_{R2}(t) = U_C(t) + U_L(t) = 3{,}334\sin(10^5 t)$ В.

Находим $i_2(t) = \dfrac{U_{R2}(t)}{R_2} = 1{,}667\sin(10^5 t)$ А.

Находим $i_1(t) = i_2(t) + i_C(t) = 1{,}667\sin(10^5 t) - 3{,}7\cdot 10^{-3} e^{-333{,}33t}\cos(3{,}162\cdot 10^5 t)$А.

Находим $U_{R1}(t) = i_1(t)\cdot R_1 = 1{,}667\sin(10^5 t) - 3{,}7\cdot 10^{-3} e^{-333{,}33t}\cos(3{,}162\cdot 10^5 t)$ В.

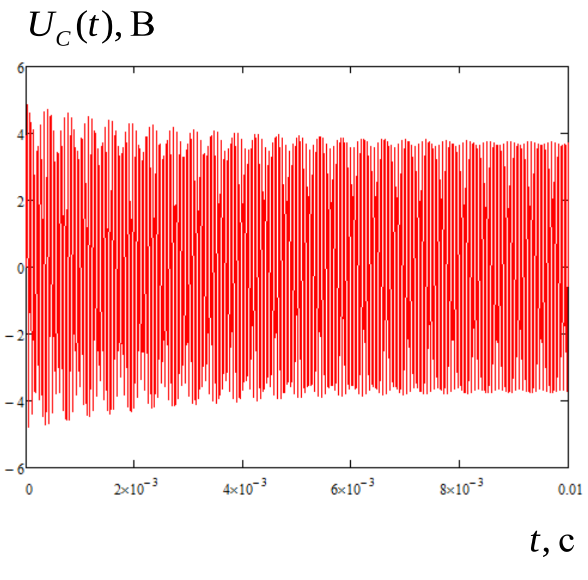
Определяем переходную характеристику:

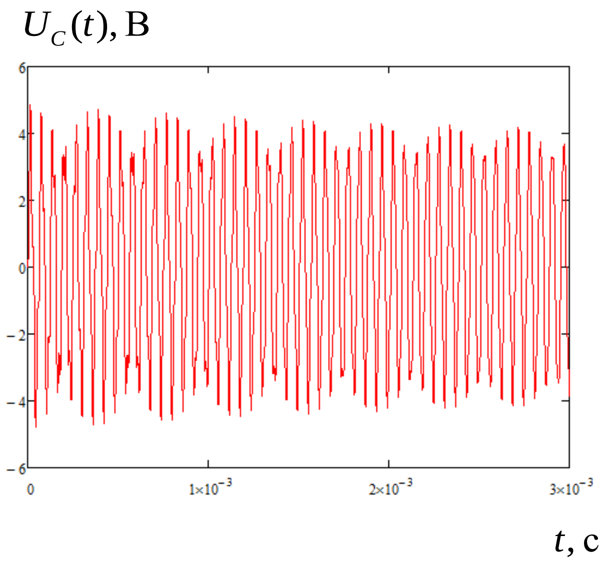
$$h(t) = 1 - e^{-\lambda t}\left(ch(j\omega_c t) + \frac{\lambda}{j\omega_c} sh(j\omega_c t)\right) = 1 - e^{-\lambda t}\left(\cos(\omega_c t) + \frac{\lambda}{\omega_c}\sin(\omega_c t)\right) =$$

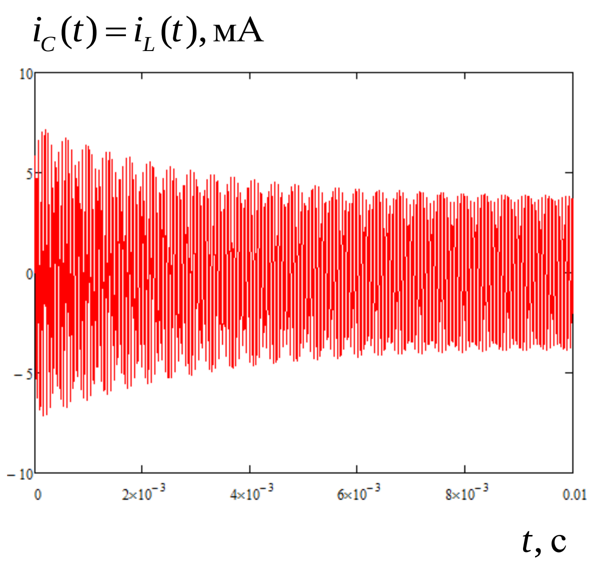
$$= 1 - e^{-\lambda t}\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\omega_c}\right)^2}\sin(\omega_c t + \gamma_0) = 1 - e^{-\lambda t}\frac{\omega_0}{\omega_c}\sin\left(\omega_c t + arctg\frac{\omega_c}{\lambda}\right) =$$

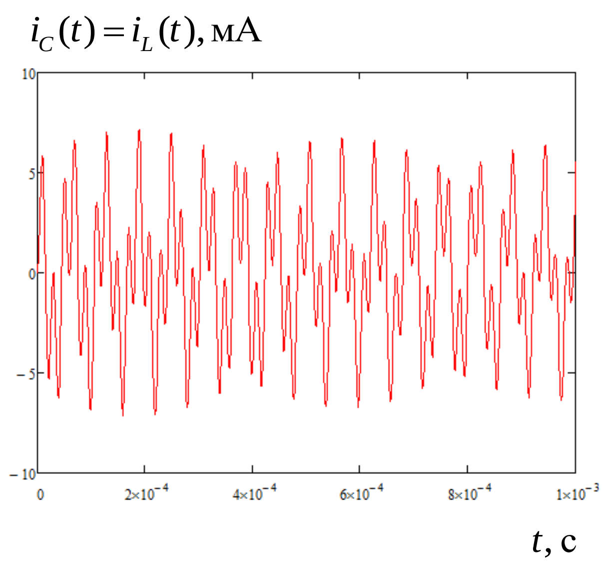
$$= 1 - e^{-333{,}33t}\sin(3{,}162\cdot 10^5 t).$$

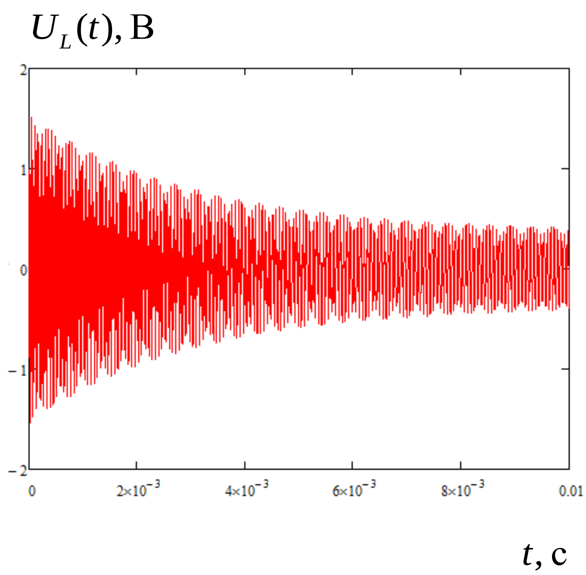
Строим графики.

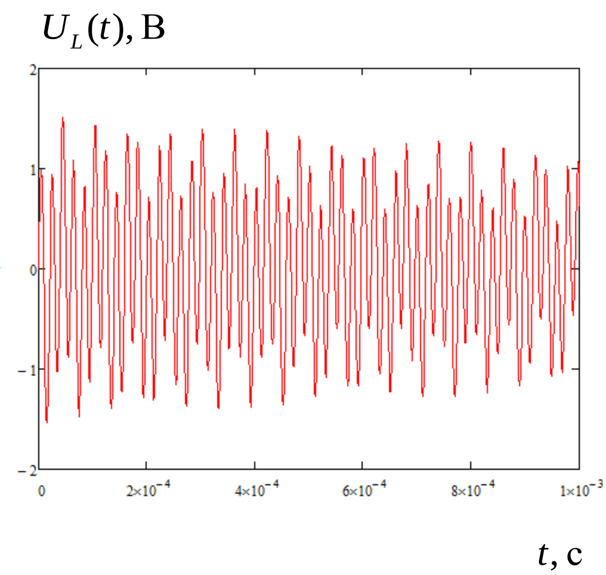


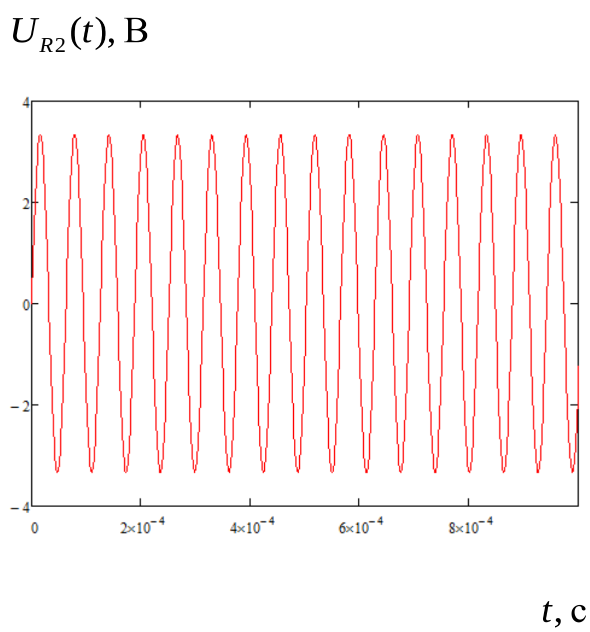


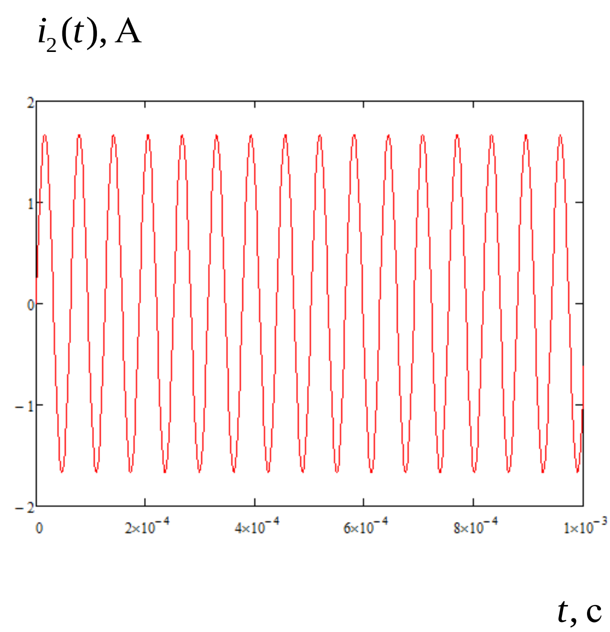

$i_C(t) = i_L(t)$, мА
10
5
0
−5
−10
0
2×10⁻³
4×10⁻³
6×10⁻³
8×10⁻³
0.01
t, с

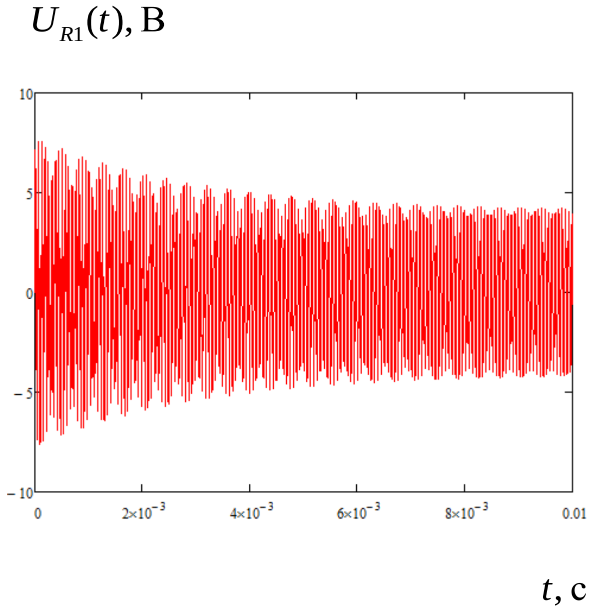

$i_C(t) = i_L(t)$, мА
10
5
0
−5
−10
0
2×10⁻⁴
4×10⁻⁴
6×10⁻⁴
8×10⁻⁴
1×10⁻³
t, с

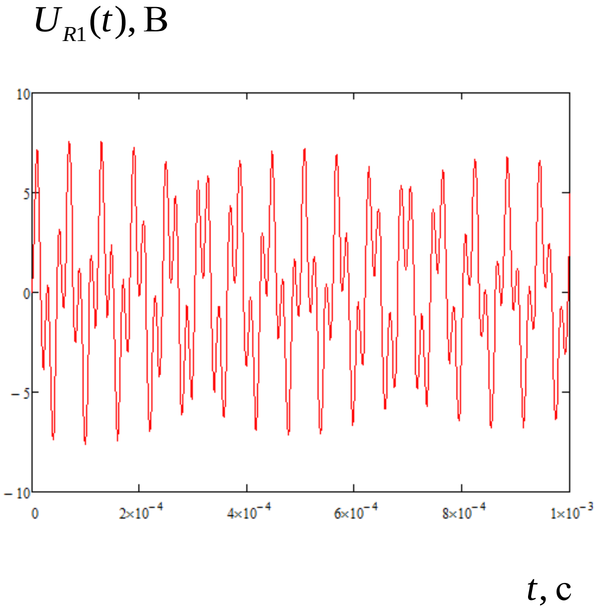

$U_L(t)$, В
2
1
0
−1
−2
0
2×10⁻³
4×10⁻³
6×10⁻³
8×10⁻³
0.01
t, с

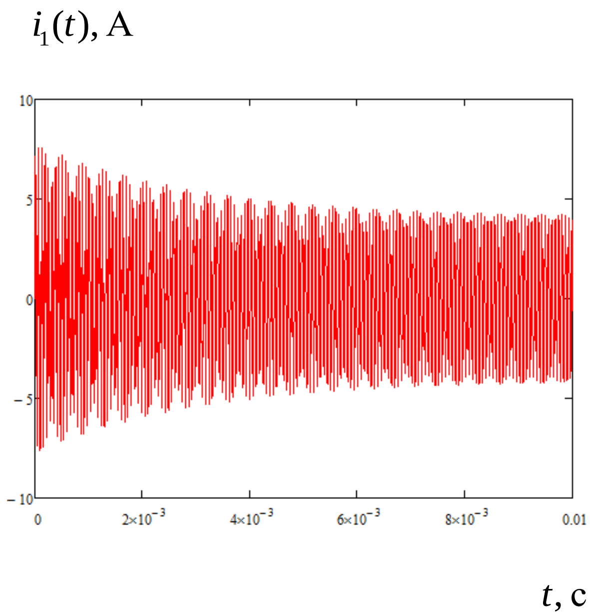

$U_L(t)$, В
2
1
0
−1
−2
0
2×10⁻⁴
4×10⁻⁴
6×10⁻⁴
8×10⁻⁴
1×10⁻³
t, с


$U_{R2}(t)$, В
4
2
0
−2
−4
0
2×10⁻⁴
4×10⁻⁴
6×10⁻⁴
8×10⁻⁴
t, с


$i_2(t)$, А
2
1
0
−1
−2
0
2×10⁻⁴
4×10⁻⁴
6×10⁻⁴
8×10⁻⁴
1×10⁻³
t, с


$U_{R1}(t)$, B
10
5
0
− 5
− 10
0
2×10−3
4×10−3
6×10−3
8×10−3
0.01
t, c


$U_{R1}(t)$, B
10
5
0
− 5
− 10
0
2×10−4
4×10−4
6×10−4
8×10−4
1×10−3
t, c


$i_1(t)$, A
10
5
0
− 5
− 10
0
2×10−3
4×10−3
6×10−3
8×10−3
0.01
t, c

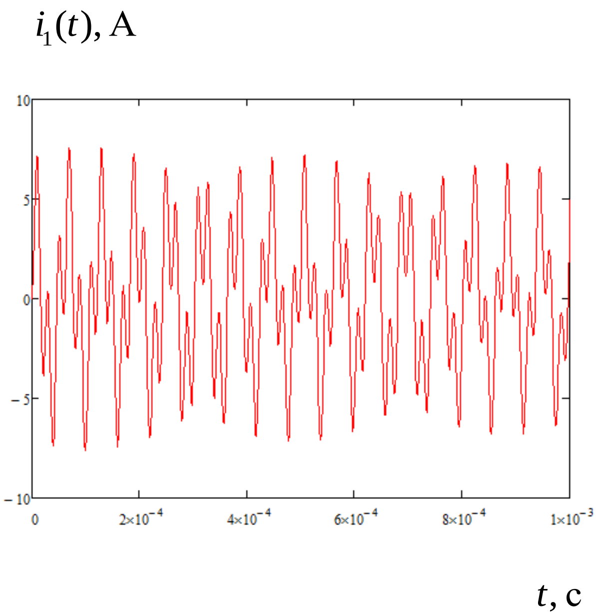
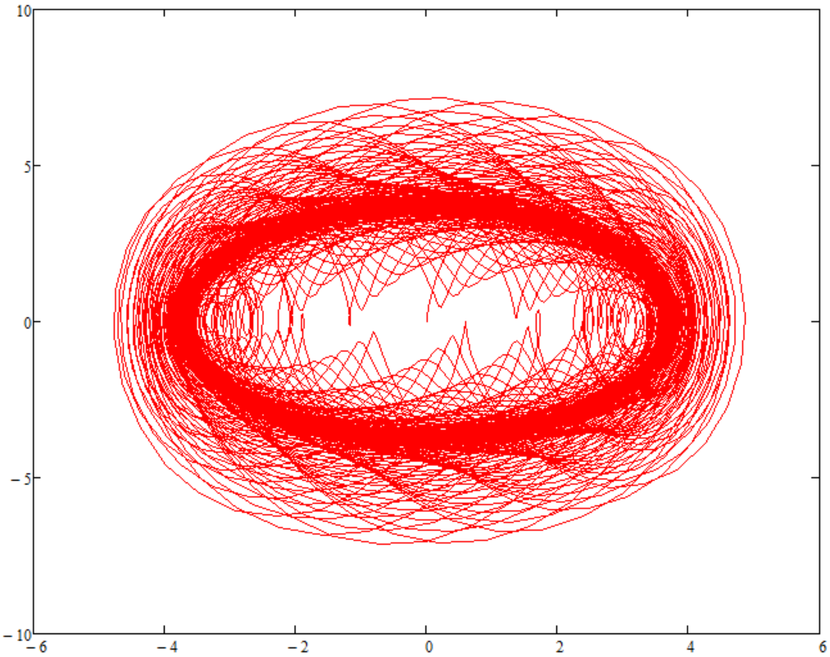

$i_1(t)$, A
10
5
0
− 5
− 10
0
2×10−4
4×10−4
6×10−4
8×10−4
1×10−3
t, c

Диаграмма состояния:

i_L, A



U_C, B

2) Для цепи б составляем уравнения для токов и напряжений (вводим обозначения $C = C_1; L = L_1$) :

$$\begin{cases} i_L + C\dfrac{dU_C}{dt} + \dfrac{U_C}{R_1} = I_1(t) \\ i_L R_2 + L\dfrac{di_L}{dt} = U_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_L R_2 + L\dfrac{di_L}{dt} = U_C \\ i_L + CR_2\dfrac{di_L}{dt} + CL\dfrac{di_L^2}{dt^2} + i_L\dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{L}{R_1}\dfrac{di_L}{dt} = I_1(t) \end{cases}$$

Упрощая последнее уравнение системы, получаем дифференциальное уравнение для тока через индуктивность i_L:

$$\frac{di_L^2}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}\frac{(CR_1R_2 + L)}{CLR_1} + \frac{i_L(R_1 + R_2)}{CLR_1} = \frac{I(t)}{LC}.$$

Рассмотрим режим свободных колебаний, $I(t) = 0$. Уравнение принимает вид:

$$\frac{di_L^2}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}\frac{(CR_1R_2 + L)}{CLR_1} + \frac{i_L(R_1 + R_2)}{CLR_1} = 0.$$

Это – линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем для него характеристическое уравнение:

$$k^2+\frac{CR_1R_2+L}{CLR_1}k+\frac{R_1+R_2}{CLR_1}=0.$$

Находим корни этого квадратного уравнения:

$$k_{1,2}=-\frac{CR_1R_2+L}{2CLR_1}\pm\sqrt{\left(\frac{CR_1R_2+L}{2CLR_1}\right)^2-\frac{R_1+R_2}{CLR_1}}\ .$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$k_1=-3{,}00\cdot 10^3\ \text{с}^{-1};\ k_2=-10^8\ \text{с}^{-1}.$$

Поскольку оба корня характеристического уравнения вещественные, режим цепи – апериодический. Свободная составляющая тока через индуктивность:

$$i_{L\text{св}}(t)=A_1e^{k_1t}+A_2e^{k_2t},$$

где A_1 и A_1 - константы.

Принужденную составляющую напряжения на конденсаторе ищем в виде $i_{L\text{пр}}(t)=A_3\cos(\omega t+\varphi)$, где $\omega=10^7\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ - циклическая частота задающего воздействия. Подставляя $i_{L\text{пр}}(t)$ в дифференциальное уравнение для $i_L(t)$, получаем:

$$-\omega^2A_3\cos(\omega t+\varphi)-\frac{\omega A_3(CR_1R_2+L)}{CLR_1}\sin(\omega t+\varphi)+\frac{A_3(R_1+R_2)}{CLR_1}\cos(\omega t+\varphi)=$$

$$=\frac{I}{LC}\cos(\omega t),$$

где $I=50\,\text{мА}$ - амплитуда тока источника питания. Решая уравнение, находим

$$A_3=\frac{-I}{LC\sqrt{\omega^2\left(\frac{CR_1R_2+L}{CLR_1}\right)^2+\left(\omega^2-\frac{R_1+R_2}{CLR_1}\right)^2}};\varphi=arctg\left(\frac{\omega(CR_1R_2+L)}{\omega^2CLR1-R1-R2}\right).$$

Полный ток через индуктивность находится как сумма свободной и принужденной составляющей:

$$i_L(t)\ =\ A_1e^{k_1t}+A_2e^{k_2t}+A_3\cos(\omega t+\varphi)\,.$$

Из начальных условий: $i_L(0)=0;\quad U_C(0)=R_2i_L(0)+L\frac{di_L}{dt}|_{t=0}=L\frac{di_L}{dt}|_{t=0}=0$ находим константы A_1 и A_2 и окончательно получаем:

$$i_L(t)=\frac{\omega A_3\sin(\varphi)+k_2A_3\cos(\varphi)}{k_1-k_2}e^{k_1t}-\frac{k_1A_3\cos(\varphi)+\omega A_3\sin(\varphi)}{k_1-k_2}e^{k_2t}+A_3\cos(\omega t+\varphi).$$

Переходная характеристика: $h(t)=1-e^{k_1t}-e^{k_2t}=1-e^{-3000t}-e^{-10^8t}$ с$^{-1}$.

Подставляем числовые значения, получаем:

$i_L(t)=i_2(t)=-1,5\cdot10^{-9}e^{-3000t}+4,951\cdot10^{-7}e^{-10^8t}-4,975\cdot10^{-6}\cos(10^7t+84,31^\circ)$ А.

Находим:

$$U_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=4,5\cdot10^{-9}e^{-3000t}-4,951\cdot10^{-2}e^{-10^8t}+4,975\cdot10^{-2}\sin(10^7t+84,31^\circ)\text{ В;}$$

$$U_{R2}(t)=i_2(t)R_2=-3\cdot10^{-9}e^{-3000t}+9,902\cdot10^{-7}e^{-10^8t}-9,95\cdot10^{-6}\cos(10^7t+84,31^\circ)\text{ В;}$$

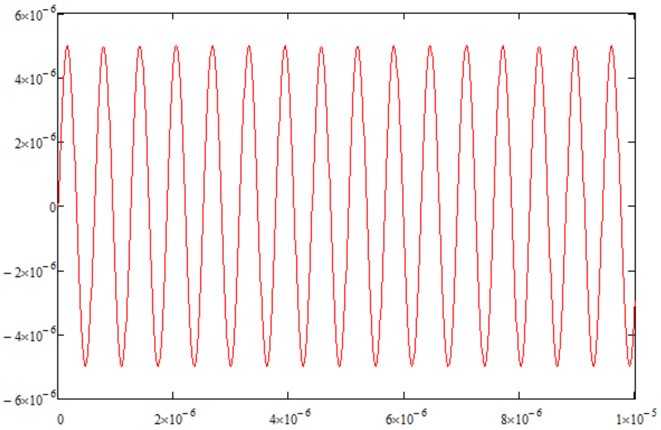
$$U_C(t)=U_{R1}(t)=U_L(t)+U_{R2}(t)=1,5\cdot10^{-9}e^{-3000t}-0,05e^{-10^8t}-$$
$$-9,95\cdot10^{-6}\cos(10^7t+84,31^\circ)+4,975\cdot10^{-2}\sin(10^7t+84,31^\circ)\text{ В;}$$

$$i_1(t)=\frac{U_C(t)}{R_1}=1,5\cdot10^{-9}e^{-3000t}-0,05e^{-10^8t}-9,95\cdot10^{-6}\cos(10^7t+84,31^\circ)+$$
$$+4,975\cdot10^{-2}\sin(10^7t+84,31^\circ)\text{ А;}$$

$$i_C(t)=C\frac{dU_C(t)}{dt}=-4,5\cdot10^{-14}e^{-3000t}+0,05e^{-10^8t}+9,95\cdot10^{-7}\sin(10^7t+84,31^\circ)+$$
$$4,975\cdot10^{-3}\sin(10^7t+84,31^\circ)\text{ В.}$$

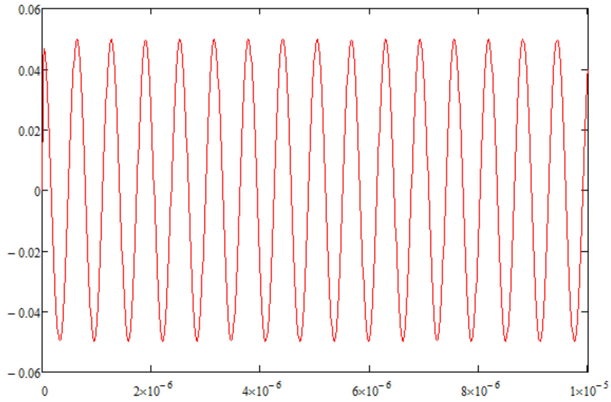
Строим графики. Поскольку множители перед экспонентами несравнимо меньше амплитуд колебаний в установившемся режиме для функций $i_L(t)$, $i_2(t)$, $U_2(t)$, переходные процессы на графиках этих функций не заметны.

$i_L(t) = i_2(t)$, A



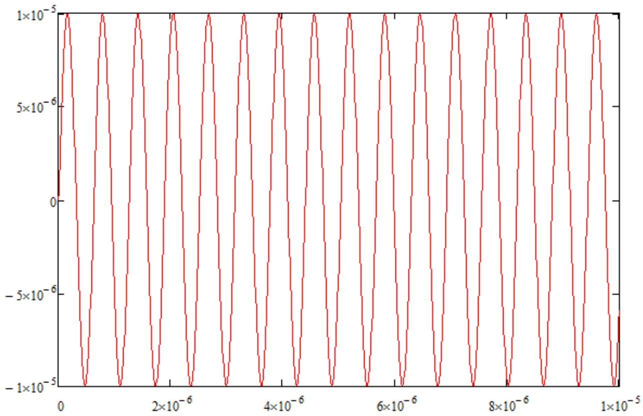
t, c

$U_L(t)$, B



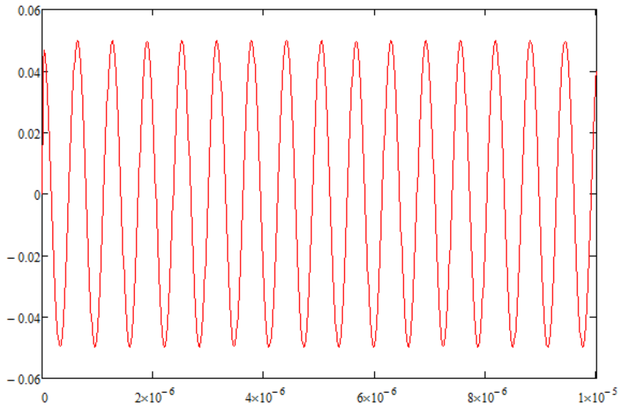
t, c

$U_2(t)$, B



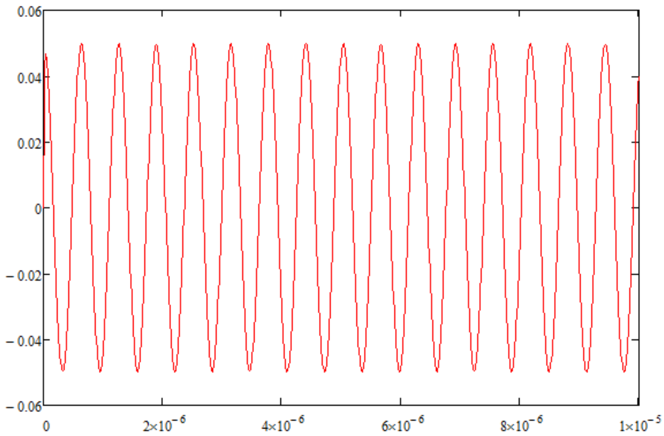
t, c

$U_C(t)$, B



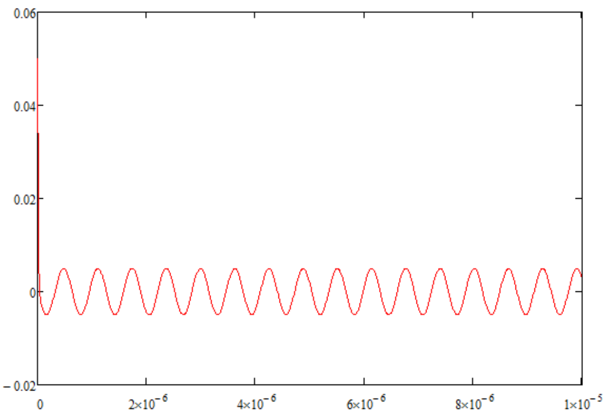
t, c

$i_1(t)$, A



t, c

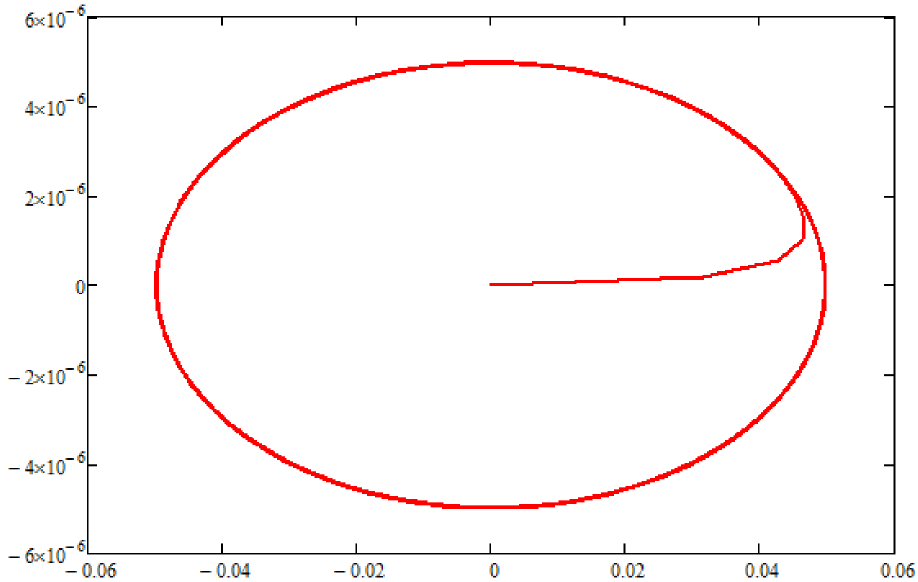
$i_C(t)$, A



t, c

Диаграмма состояния:

$i_L(t)$, A



$U_C(t)$, B